

УДК 539.3

ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛЕЙ И МЕТОДОВ РАСЧЕТА ОПТИМАЛЬНЫХ ФОРМ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ ПРИ ПРОНИКАНИИ В ГРУНТ

В.Г. Баженов, В.Л. Котов, Е.Ю. Линник

Аннотация

Представлены результаты исследования особенностей численного расчета методом локальных вариаций оптимальных форм осесимметричных ударников при движении в грунтовой среде. Установлено, что методика расчета полей давлений в окрестности головной части тела должна учитывать двумерные эффекты обтекания, однако предварительные исследования целесообразно проводить на базе известных упрощенных моделей, например, локального взаимодействия. Показано, что метод циклического покоординатного спуска позволяет с точностью, определяемой погрешностью численных расчетов, вычислять параметры образующей тела вращения, которая может быть представлена полиномом Безье второй степени.

Ключевые слова: метод локальных вариаций, оптимальная форма тела вращения, проникание, грунтовая среда, модель локального взаимодействия, минимальное сопротивление, полином Безье.

1. Введение

Разработка методов построения форм тел, оптимальных по сопротивлению и/или глубине проникания в грунт в общей постановке возможна лишь при наличии упрощающих предположений о характере взаимодействия тела и среды [1], например, гипотезы локальности [1-5]. В основе получивших широкое распространение моделей локального взаимодействия (МЛВ) лежит предположение, что каждый элемент контактной поверхности взаимодействует со средой независимо от других участков тела. Применение различных модификаций МЛВ позволило выделить [2, 3] класс абсолютно-оптимальных тел (АОТ), содержащий общее решение достаточно широкого круга задач оптимизации формы. В пространственной постановке нормаль к поверхности таких тел составляет с направлением движения постоянный оптимальный угол [3, 5]. Среди тел вращения АОТ является круговой конус с тем же оптимальным углом раствора, определяемым скоростью тела и прочностными характеристиками среды. Для грунтов малой прочности осесимметричные АОТ обладают значительным удлинением [3]. Для поиска формы тела вращения минимального сопротивления внедрению при заданной длине тела, меньшей длины абсолютно-оптимального конуса, которая, как известно, содержит торец [4], необходимо применять численные методы [6].

Известные методы решения задач поиска образующей тел с притуплением, внедряющегося на максимальную глубину, основаны на использовании МЛВ. Постановка и численный метод решения вариационных задач на основе генетического алгоритма изложен в [7], разработке модификаций метода локальных вариаций посвящены работы [8, 9], где рассматривались задачи проникания оптимальных тел с торцом в среды типа металла или бетона. Для грунтовых сред экспериментально и

теоретически – сравнением с результатами численных расчетов в осесимметричной постановке на основе модели грунтовой среды Григоряна, была показана применимость МЛВ к описанию проникания острых конусов [10-12]. Погрешность МЛВ на базе решения задачи о расширении сферической полости в определении сил сопротивления внедрению затупленных тел исследована в работах [10, 13]. Показано (на примере задачи поиска оптимального тела вращения заданной длины и площади основания) [6], что решение с учетом нелинейных эффектов обтекания в двумерной постановке позволяет существенно уточнить как форму, так и силовые и кинематические характеристики оптимальных затупленных тел при проникании в грунтовые среды.

В данной работе, аналогично [14], особенности поведения силы сопротивления внедрению в грунт – целевой функции в задаче оптимизации формы тела, исследуются на базе упрощенной модели контактного взаимодействия при различных параметризациях образующей [15-17]. Далее полученная информация применяется в итерационном процессе построения оптимальных форм ударников при движении в грунтовых средах на основе численных расчетов в осесимметричной постановке.

2. Постановка задачи и методика численного решения

Рассматривается стадия развитого проникания ударника при постоянной скорости внедрения V_0 , причем обтекание искомой головной части ударника грунтом плотности ρ_0 происходит безотрывно. Введем цилиндрическую систему координат rOz , Oz – ось симметрии. Ударник – тело вращения заданной длины L и радиуса основания R , образующая боковой поверхности тела описывается кривой $r(z)$ и включает передний торец радиуса R_0 . Действующее контактное давление определяется только нормальной компонентой вектора скорости в соответствии с МЛВ общего вида $\sigma = \rho_0 V_0^2 f(\alpha)$, $\alpha = \sin \eta$, где η – угол, образованный направлением вектора скорости и касательной к искомой кривой $r(z)$.

Положим: $D = F/(\rho_0 V_0^2 S)$, где F – полное осевое сопротивление проникающего тела, $S = \pi R^2$ – площадь миделя, $r_0 = R_0/R$ – радиус притупления, $l = L/R$ – удлинение тела, тогда

$$D(r) = f(1)r_0^2 + 2 \int_{r_0}^1 f(\alpha) r dr, \quad (1)$$

Таким образом, при известной функции $f(\alpha)$ имеем простейшую задачу вариационного исчисления, в которой необходимо определить такую выпуклую кривую $r(z)$, удовлетворяющую условию $r(l) = 1$, что полное сопротивление (1) имеет минимум. Приближенное решение этой задачи на основе известного метода локальных вариаций [18, 19] сводится к отысканию чисел, минимизирующих функцию N переменных $D(r_0, \dots, r_{N-1})$, где (r_0, \dots, r_{N-1}) – точки кусочно-линейной аппроксимации искомой кривой (см. также [8, 9]).

Ранее была показана [14-20] сходимость последовательных приближений при кусочно-линейном представлении образующей боковой поверхности оптимального тела и убывание погрешности определения силы сопротивления с ростом числа узлов образующей. В задачах газовой и аэродинамики доказана эффективность аппроксимации образующей в классе полиномов или степенных функций, содержащих небольшое число искомых параметров оптимизации [15, 17]. Отмечено [21], что аппроксимация квадратичным полиномом в форме Безье является удачной параметризацией образующей оптимального тела и в случае проникания его в грунт.

Модифицированный алгоритм [20, 21] позволяет единообразно проводить вычисления как при кусочно-линейном представлении образующей, так и при функциональном, когда компоненты вектора (r_0, \dots, r_{N-1}) являются параметрами полинома. Для применения алгоритма необходимо конкретизировать способ расчета интегральной силы сопротивления внедрению D в соотношении (1) — на основе МЛВ или одной из известных моделей грунтовой среды в постановке механики сплошных сред [6].

Вектор неизвестных параметров $\mathbf{r} = r_i$, $i = \overline{0, N-1}$ является одним из локальных экстремумов (1), для определения которых составляется система уравнений

$$D(r) = f(1)r_0^2 + 2 \int_{r_0}^1 f(\alpha) r d\alpha, \quad (2)$$

$$\mathbf{D}'(r) = 0, \Leftrightarrow \frac{\delta D}{\delta r_i} = 0, i = \overline{0, N-1} \quad (3)$$

Система нелинейных уравнений (2) решается итерационным методом Ньютона

$$\mathbf{D}''(r^k)(r^{k+1} - r^k) = -\mathbf{D}'(r^k) \Leftrightarrow \frac{\delta^2 D}{\delta r_i \delta r_j} \Delta r_j^{k+1} = -\frac{\delta D}{\delta r_i}^k, i, j = \overline{0, N-1} \quad (4)$$

где k — номер итерации, $\mathbf{D}''(r^k)$ — симметричная матрица коэффициентов (в случае кусочно-линейного представления образующей имеет трехдиагональный вид). Частные производные первого и второго порядка могут вычисляться точно [20] или методом конечных разностей с шагом варьирования δ [20, 21].

Проведение вычислений на каждой итерации (3) эквивалентно нахождению минимума приращения сопротивления ΔD , представленного в виде квадратичной формы разложением в ряд Тейлора в окрестности r^k

$$\Delta D = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\delta D}{\delta r_i} \Delta r_i^{k+1} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=0}^{N-1} \frac{\delta^2 D}{\delta r_i \delta r_j} \Delta r_i^{k+1} \Delta r_j^{k+1} \quad (5)$$

Другие полиномиальные интерполяции целевой функции в области изменения параметров радиуса δ могут быть получены методами планирования эксперимента [22]. Наиболее полная модель, основанная на полном ортогональном плане второго порядка, включает все промежуточные взаимодействия факторов, но требует для реализации проведения N^3 вычислений целевой функции и при больших N является, очевидно, избыточной. В ротатабельных планах второго порядка число расчетов не меньше, чем $N^2 + 2N + 1$. Для вычисления коэффициентов (4) на основе центральных разностей второго порядка аппроксимации также может быть составлена матрица планирования, количество операций равно $N(N-1) + 2N + 1$ [21]. Существенно уменьшить количество параметров N , как было отмечено выше, позволяет представление образующей оптимального тела кривой Безье.

Параметрический полином в форме Безье [23] описывается выражением

$$P(s) = (1-s)^2 P_0(s) + 2(1-s)s P_1(s) + s^2 P_2(s), s \in [0, 1] \quad (6)$$

С учетом поставленных ограничений — заданных безразмерных величин радиуса основания и длины искомого оптимального тела $r_2 = 1$, $z_0 = 0$, $z_2 = l$, вектор параметров \mathbf{r} содержит три параметра ($N = 3$), представляющих неизвестные координаты вершин P_i , $\overline{0, N-1}$ характеристического треугольника [23] полинома Безье (1), φ_0 и φ_2 — углы при соответствующих вершинах характеристического треугольника.

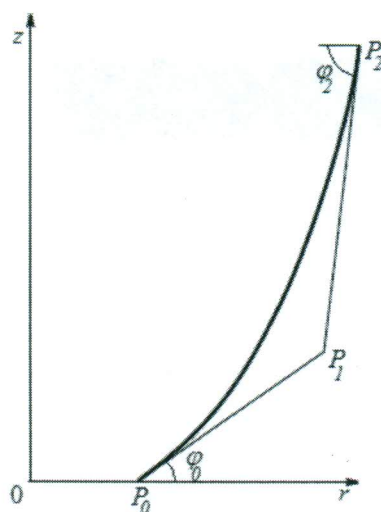


Рис. 1. Параметрическое представление образующей в виде полинома Безье

Таким образом, на каждой итерации метода Ньютона (3) целевую функцию необходимо вычислять 15 раз. Это не критично при аналитическом вычислении функции, но существенно увеличивает трудоемкость при численном расчете обтекания ударника даже в осесимметричной постановке. В данной работе, аналогично [14] предварительное исследование точности и сходимости методов оптимизации формы ударника, обоснование выбора приемлемой аппроксимации образующей проводятся в упрощенной постановке на основе МЛВ. Как будет показано далее, решение задачи параметрической оптимизации методом циклического покоординатного спуска с изменением шага варьирования δ .

3. Результаты предварительных расчетов

В качестве тестовой рассмотрим задачу проникания в грунт, поведение которого описывается моделью нелинейно-сжимаемой жидкости. Как было показано ранее [10], в этом случае реализуется наибольшая ошибка МЛВ при определении силы сопротивления внедрению. Сжимаемость грунтовой среды характеризуется ударной адиабатой

$$c = A + \lambda u \quad (7)$$

представленной линейной зависимостью скорости ударной волны c от массовой скорости u за ее фронтом. Постоянная A характеризует скорость распространения волны сжатия в грунте при малых давлениях, λ – предельную сжимаемость грунта.

Численные расчеты проводятся при следующих значениях параметров: $A = 460$ м/с, $\lambda = 2.3$, $\rho_0 = 1700$ кг/м³, размеры тела $R = 0.01$ м, $L/R = \sqrt{5}$, скорость проникания $V_0 = 400$ м/с.

Поведение нелинейно-сжимаемой жидкости описывается одночленной МЛВ $f(\alpha) = C\alpha^2$. Среднее значение константы C , определенной из решения одномерной задачи о расширении сферической полости [6, 11, 13]

$$C = \frac{3/2 - \epsilon^4}{1 - \epsilon^3}, = \frac{V_0 \alpha}{c}, c = \lambda^{1/3} V_0 \alpha + A/3,$$

при $\alpha^2 = 1/6$ примем равным ≈ 1.1 .

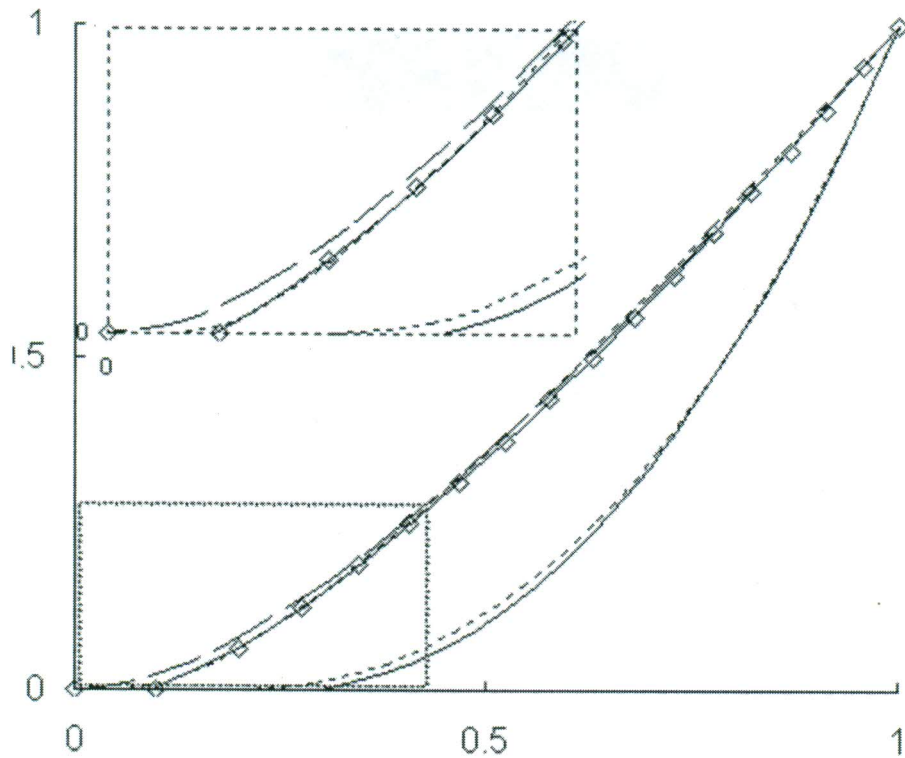


Рис. 2. Образующие тел вращения минимального сопротивления

На рис. 2, а приведены результаты расчетов оптимальных форм: кривые 1 есть численные решения системы уравнений (3) на основе МЛВ, кривые 2 получены в осесимметричных численных расчетах (см. далее). Светлые квадраты соответствуют кусочно-линейному представлению образующей ($N = 16$), сплошная и штриховая линии 1 – представлению образующей в форме полинома Безье при $N = 3$ и 2. Видно, что решение, определяемое тремя параметрами, практически точно соответствует кусочно-линейному представлению (фрагмент в окрестности вершины тела см. на рис. 2).

Пунктирная линия также является решением системы (3) при $N=3$ и получена в сходящемся итерационном процессе метода Ньютона, но при другом начальном приближении. Из двух решений локальному минимуму соответствует только образующая, изображенная сплошной линией (все угловые миноры матрицы вторых производных D'' в соотношениях (3) положительны). Другое численное решение, локальным минимумом не является – угловые миноры матрицы D'' имеют разные знаки, и значение силы сопротивления для него несколько больше.

Параметры решений приведены в таблице, жирным шрифтом выделены искомые параметры полинома Безье

N	$P_0(r, z)$	$P_1(r, z)$	$P_2(r, z)$	φ_0	φ_2	D
3	(0.1, 0)	(0.42, 0.356)	(1, 2.24)	0.83	1.27	0.15
3	(0.06, 0)	(0.28, 0)	(1, 2.24)	0	1.26	0.15
2	(0, 0)	(0.3, 0)	(1, 2.24)	0	1.27	0.15

Обозначим оптимальные значения в первой строчке таблицы 1 верхним индексом * ($r_0^* = 0.096, D^* = 0.1485$) и введем в рассмотрение целевую функцию

$\delta D = (\frac{D}{D^*} - 1)100$ При неудовлетворительном начальном приближении итерационный процесс метода Ньютона (3) может сходиться к другому решению (строка 2 таблицы 1) или расходиться. В лучшем случае решение системы (2) может быть получено за 5-7 итераций, при числе расчетов целевой функции порядка 100.

Рассмотрим в этой связи применение метода циклического покоординатного спуска с переменным шагом варьирования параметров δ [18]. Искомыми параметрами будем считать радиус притупления и углы φ_0 и φ_2 характеристического треугольника полинома Безье. Начальное значение шага примем $\delta = 0.05$, начальное значение $r_0 = 0$, $\varphi_0 = 1$, $\varphi_2 = 1.35$, что не является хорошим начальным приближением метода Ньютона.

Последовательные приближения осуществляем, начиная с параметра φ_2 , значение которого уменьшается от начального 1.35 до 1.25 (рис. 3, а, кривая 1), точки соответствуют вычисленным значениям целевой функции δD , отложенным по оси ординат. Варьирование параметра φ_0 (рис. 3, б) приводит к установлению $\varphi_0 = 0$, радиус притупления $r_0 = 0.05$ (рис. 3, в).

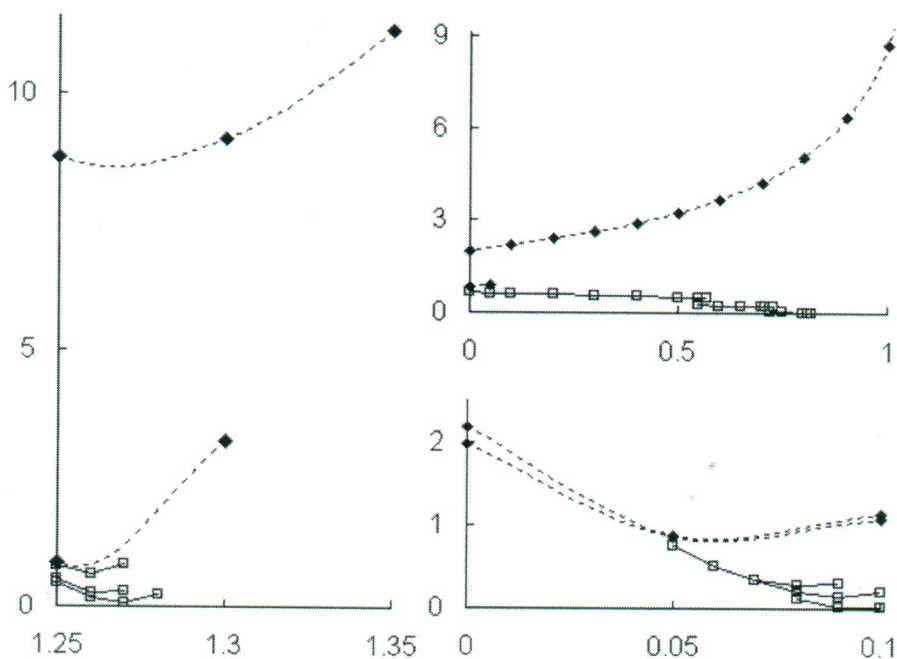


Рис. 3. Изменение целевой функции δD при варьировании параметров φ_0 , φ_2 и r_0

Результаты второго цикла вычислений с $\delta = 0.05$ шагом и полученными параметрами показаны на рис. 3 кривыми 2. Отмечается уменьшение относительного значения сопротивления $\delta D \approx 1\%$, но значения параметров далеки от оптимальных значений (приблизительно соответствуют приведенным в строке 2 таблицы 1). Дальнейшие изменения в решении происходят при уменьшении шага варьирования $\delta \leq 0.01$. В этом случае в одном из расчетов значение r_0 становится большим 0.52, и параметр φ_0 достаточно быстро принимает значение, близкое φ_0^* (кривая 3 на рис. 3, б), как и остальные параметры в 3 – 5 циклах (рис. 3, кривые 3 – 5, светлые точки). В целом можно отметить, что общее число расчетов в методе спуска с точностью $\delta = 0.01$ даже при неудовлетворительном начальном приближении оказалось не превышающем таковое в методе Ньютона. Таким образом, для расчетов

оптимальных форм на базе уравнений механики сплошных сред в осесимметричной постановке можно рекомендовать аппроксимацию образующей полиномом Безье с тремя параметрами и метод оптимизации на основе циклического покоординатного спуска.

4. Результаты расчетов в осесимметричной постановке

Система уравнений модели нелинейной жидкости записывается следующим образом

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho(u_{r,r} + u_{z,z}) = -\frac{\rho u_r}{r}, \rho \frac{du_r}{dt} + p_{,r} = 0, \rho \frac{du_z}{dt} + p_{,z} = 0, p = \frac{\rho_0 A^2 \theta}{(1 - \lambda \theta)^2}, \theta = 1 - \frac{\rho_0}{\rho}$$

где обозначено: ρ_0 и ρ – начальная и текущая плотность, d/dt полная производная по времени, символ после запятой означает дифференцирование по соответствующей переменной, константы λ и λ определяются ударной адиабатой (6).

Для определения сопротивления тела решается задача обтекания методом установления. В начальный момент времени давление в грунте равно нулю, скорость частиц грунта равна скорости удара и направлена вдоль оси вращения тела. Внешние границы расчетной области грунта отнесены достаточно далеко, чтобы возмущения, отражающиеся от них, не исказили численное решение в области контакта тела и среды. Неподвижный ударник считается жестким. На головной части ударника, контактирующей с грунтовой средой, принимается условие “непроницаемости” по нормали со “скольжением по касательной”. Определенная таким образом сила сопротивления соответствует силе на квазистационарной стадии внедрения с постоянной скоростью, полученной в прямом ударе.

Численные расчеты проводятся в рамках методики, основанной на модифицированной схеме Годунова первого порядка точности [24, 25], реализованной в пакете прикладных программ “Динамика-2” [26]. Применимость известной численной методики и пакета программ к расчету параметров процессов проникания жестких и деформируемых ударников в мягкие грунтовые среды показана ранее [27–29]. Численные расчеты проводятся при тех же значениях параметров среды, что и в п. 3.

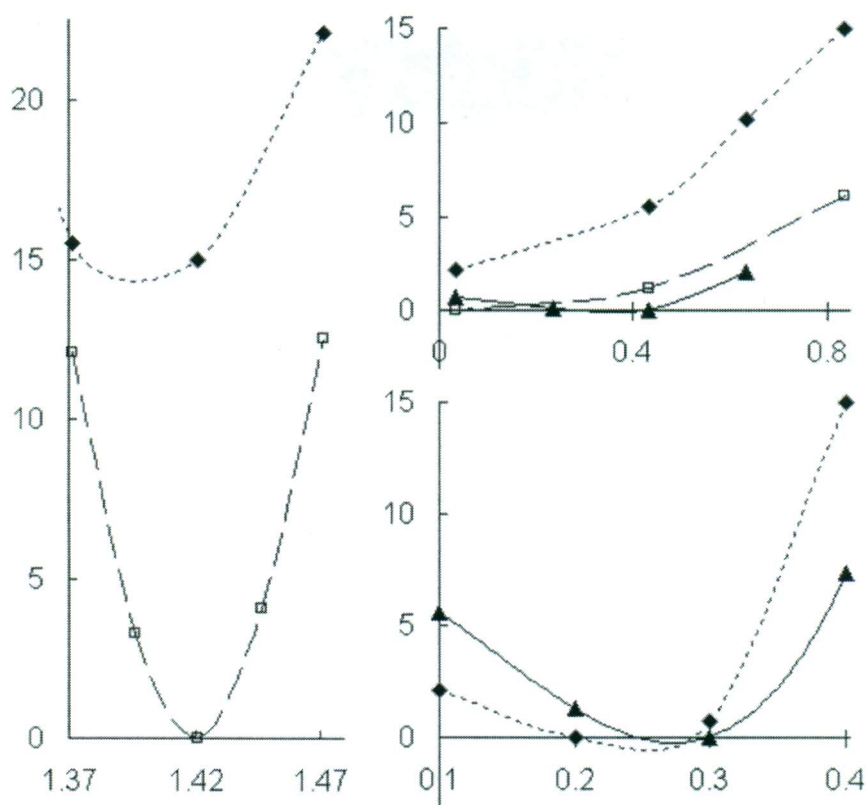
Анализ точности используемой численной методики показал практически линейную монотонную сходимость решений в зависимости от шага сетки. При одинаковом размере ячейки разностной сетки (выбирались близкие к квадратным ячейки сетки), отмечается большая погрешность для затупленного тела.

Далее приводятся результаты определения параметров образующей оптимального тела при проникании в грунт на основе численных осесимметричных расчетов. Начальное приближение применяемого метода циклического покоординатного спуска приведено в строке 1 таблицы 1, $\delta = 0.05$, порядок варьирования параметров $\varphi_2 - \varphi_0 - r_0 - \varphi_2$, как в п. 3.

На рис. 4 приведены значения целевой функции δD в зависимости от изменяемых в процессе покоординатного спуска параметров. Видно, что процесс последовательных приближений качественно близок к приведенному ранее на рис. 4. В первом цикле вычислений значение параметра φ_0 уменьшается до 0 (рис. 4, б), видно, что сопротивление незначительно меняется при $0.2 < r_0 < 0.3$ (рис. 4, в).

Далее полагаем $r_0 = 0.2$. Результаты второго цикла вычислений с полученными параметрами показаны на рис. 4 кривыми 2, отмечается уменьшение относительного значения сопротивления δD .

Кривые 3 на рис. 4 соответствуют расчетам при $r_0 = 0.3$. Величина φ_2 осталась практически без изменений, значение сопротивления тела равно минимальному при $\varphi_0 = 0.434$. Результаты расчетов сведены в таблицу.

Рис. 4. Изменение целевой функции δD при варьировании параметров φ_0 , φ_2 и r_0

N	$P_0(r, z)$	$P_1(r, z)$	$P_2(r, z)$	φ_0	φ_2	D
3	(0.1, 0)	(0.42, 0.36)	(1, 2.24)	0.83	1.27	0.13
3	(0.3, 0)	(0.69, 0.18)	(1, 2.24)	0.43	1.42	0.08
3	(0.2, 0)	(0.66, 0)	(1, 2.24)	0	1.42	0.08

В первой строке таблицы 2 приведены параметры оптимального тела, полученного в п. 3 в рамках МЛВ, отличие составляет значение сопротивления D , которое несколько уменьшилось. Вторая и третья строки представляют искомые параметры образующей оптимальных тел, обладающих одинаковым сопротивлением (в рамках погрешности численных расчетов порядка 1 %). Образующие тел с этими параметрами приведены на рис. 2 сплошной и пунктирной кривыми 2 соответственно. Отметим качественно похожее поведение численных решений в постановках на основе МЛВ и механики сплошных сред, но существенное отличие в формах оптимальных тел (рис. 2) и их сопротивлении. Как отмечалось выше, полученное различие в силах сопротивления оптимальных тел для модели грунта – нелинейной жидкости является наибольшим. Различие уменьшается при учете внутреннего и поверхностного трения, а также других особенностей динамического деформирования грунтовых сред, численная реализация которых не представляет труда в рамках известных моделей грунтовых сред.

Заключение

Исследована применимость моделей локального взаимодействия в задачах поиска осесимметричных форм тел минимального сопротивления при проникании в мягкие грунтовые среды. Проведен анализ прямых численных методов оптимизации форм тел вращения, основанных на модифицированном методе локальных вариаций. Разработан метод, позволяющий вычислять параметры образующей оптимального тела вращения, которая может быть представлена полиномом Безье второй степени. Сходимость последовательных приближений при расчете сил сопротивления в рамках модели локального взаимодействия и в двумерной осесимметричной постановке качественно подобны при существенном количественном отличии форм минимального сопротивления. Показано, что методика расчета полей давлений в окрестности головной части тела должна учитывать двумерные эффекты обтекания. В предварительных исследованиях может быть использована модель локального взаимодействия, при этом рассчитанные силы сопротивления могут оказаться завышенными в полтора – два раза.

Работа выполнена в рамках Программы по государственной поддержке ведущих научных школ РФ (НШ-593.2014.8) и РФФИ (13-08-00531_а, 13-08-00658_а, 14-01-31113-мол_а).

Summary

V.G. Bazhenov, V.L. Kotov, E. Yu. Linnik The study of models and methods for computation of optimal forms of bodies in rotation penetration into the soil

The results of studies of the numerical calculation by local variations in the optimal forms of axisymmetric shock when moving in the soil environment. It is found that the method of calculation pressure fields in the vicinity of the head portion of the body must be taken into account two-dimensional flow effects, but preliminary studies advisable to carry out on the basis of well-known simplified models, for example, local interaction. It was shown that the method of the cyclic of descent allows an accuracy determined by the error numerical simulations to calculate the parameters of forming a body of revolution, which can be represented by a polynomial Bezier second power

Key words: method of local variations, optimal form of bodies in rotation, penetration, soil environment, model of local interaction, minimum resistance, Bezier polynomial.

Литература

1. *Ben-Dor G., Dubinsky A., Elperin T.* Shape optimization of high-speed penetrators: a review // Central European Journal Engineering. – 2012. – № 2(4). – pp. 473–482.
2. *Остапенко Н.А., Якунина Г.Е.* О телах наименьшего сопротивления, движущихся в средах при наличии закона локальности // Изв. РАН. Механ. жидкости и газа. – 1992. – № 1. – С. 95–106.
3. *Якунина Г.Е.* К построению оптимальных пространственных форм в рамках модели локального взаимодействия // Прикл. матем. и механ. – 2000. – Т 64, Вып.2. – С. 299–309.
4. *Остапенко Н.А.* Тела вращения минимального сопротивления при движении в плотных средах // Успехи механики. – 2002. – № 2. – С. 105–149.

5. *Баженов В.Г., Котов В.Л.* Решение задач о наклонном проникании осесимметричных ударников в мягкие грунтовые среды на основе моделей локального взаимодействия // Прикл. матем. и механ. – 2010. – Т. 74, Вып. 3. – С. 391–402.
6. *Баженов В.Г., Баландин В.В., Григорян С.С., Котов В.Л.* Анализ моделей расчета движения тел вращения минимального сопротивления в грунтовых средах // Прикл. матем. и механ. – 2014. – Т. 12, Вып. 1. – С. 98–115.
7. *Баничук Н.В., Иванова С.Ю.* Оптимизация формы жесткого тела, внедряющегося в сплошную среду // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб.. – 2007. Вып. 69. – С. 47–57.
8. *Ben-Dor G., Dubinsky A., Elperin T.* Shape optimization of impactors against a finite width shield using a modified method of local variations // Mechanics Based Design of Structures and machines. – 2007. – Vol. 35. – pp. 113–125.
9. *Ben-Dor G., Dubinsky A., Elperin T.* Modification of the method of local variations for shape optimization of penetrating impactors using the localized impactor/shield interaction models // Mechanics Based Design of Structures and machines. – 2007. – Vol. 35. – pp. 1–14.
10. *Котов В.Л., Баландин В.В., Линник Е.Ю., Баландин В.В.* О применимости модели локального взаимодействия для определения сил сопротивления внедрению сферы в нелинейно-сжимаемый грунт // Вычислительная механика сплошных сред. – 2012. – Т. 5, № 4. – С. 435–442.
11. *Котов В.Л., Баландин Вл. В., Линник Е.Ю., Баландин Вл. Вл.* Применение модели локального взаимодействия для определения силы сопротивления внедрению ударников в песчаный грунт // J Прикладная механика и техническая физика. – 2013. – Вып. 54, № 4. – pp. 114–125.
12. *Линник Е.Ю.* Определение параметров модели локального взаимодействия при внедрении конических ударников в песчаный грунт // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. – 2014. – № 1(1). – С. 141–147.
13. *Баженов В.Г., Котов В.Л., Линник Е.Ю.* О моделях расчета форм осесимметричных тел минимального сопротивления при движении в грунтовых средах // Доклады академии наук. – 2013. – Т. 449, № 2. – С. 156–159.
14. *Таковицкий С.А.* О сходимости в задаче оптимизации крыла сложной формы // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2002. – Т. 42, № 5. – С. 690–697.
15. *Борисов В.М., Михайлов И.Е.* Об оптимизации сверхзвуковых частей пространственных сопел // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1981. – Т. 21, № 2. – С. 517–519.
16. *Таковицкий С.А.* Аналитическое решение в задаче построения осесимметричных носовых частей минимального волнового сопротивления // Изв. РАН. Механ. жидкости и газа. – 2006. – № 2. – С. 157–162.
17. *Крайко А.А., Пьянков К.С.* Эффективные прямые методы в задачах построения оптимальных аэродинамических форм // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2010. – Т. 50, № 9. – С. 1624–1631.

18. Черноусько Ф.Л. Метод локальных вариаций для численного решения вариационных задач // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. –1965. –Т. 5, № 4. –С. 749–754.
19. Черноусько Ф.Л., Баничук Н.В. Баничук Н.В. Вариационные задачи механики и управления: Численные методы. – М.: Наука, –1973. –238 с.
20. Котов В.Л., Линник Е.Ю. . Численный расчет формы тела вращения минимального сопротивления движению в грунтовой среде в рамках модели локального взаимодействия.// Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. –2013. –Вып. 75, № 4. –С. 57–65.
21. Котов В.Л., Линник Е.Ю. Численный расчет оптимальной формы тела вращения при движении с постоянной скоростью в грунтовой среде // Вычислительная механика сплошных сред. –2014. –Т. 7, № 2. –С. 142–151.
22. Адлер Ю.П., Маркова Е.В., Грановский Ю.В. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий. – М.: Наука, –1976. –278 с.
23. Фокс А., Пратт М. Вычислительная геометрия. Применение в проектировании и на производстве: Пер. с англ. – М.: Мир, –1982. –304 с.
24. Абузаров М.Х., Баженов В.Г., Котов В.Л. и др. Метод распада разрывов в динамике упругопластических сред // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. –2000. –Т. 40, № 6. –С. 940–953.
25. Баженов В.Г., Котов В.Л. Применение метода распада разрывов к решению задач взрывного нагружения грунтовых сред // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2003. –Т. 43, № 2. –С. 287–2984.
26. Баженов В.Г., Зефирова С.В., Кочетков А.В., Крылов С.В., Фельдгун В.Р. Пакет программ «Динамика-2» для решения плоских и осесимметричных нелинейных задач нестационарного взаимодействия конструкций со сжимаемыми средами // Мат. моделирование. –2000. –Т. 12, № 6. –С. 67–72.
27. Баженов В.Г., Котов В.Л., Крылов С.В., Баландин В.В., Брагов А.М., Цветкова Е.В. Экспериментально-теоретический анализ нестационарных процессов взаимодействия деформируемых ударников с грунтовой средой // Прикладная механика и техническая физика. –2001. –Т. 42, № 6. –С. 190–198.
28. Баженов В.Г., Брагов А.М., Котов В.Л., Кочетков А.В. Исследование удара и проникания тел вращения в мягкий грунт // Прикл. матем. и механ. –2003. –№ 6. –С. 686–697.
29. Баженов В.Г., Брагов А.М., Котов В.Л. Экспериментально-теоретические исследования процессов проникания жестких ударников и идентификация свойств грунтовых сред // Прикладная механика и техническая физика. – 2009. –Т. 50, № 6. –pp. 115–124.

Баженов Валентин Георгиевич – проф., гл.н.с., зав.лаб. НИИМ ННГУ им. Н.И. Лобачевского.

E-mail: bazhenov@mech.unn.ru

Котов Василий Леонидович –д. ф.-м. н., с.н.с. НИИМ ННГУ им. Н.И. Лобачевского.

E-mail: vkotov@inbox.ru

Линник Елена Юрьевна — м.н.с. НИИМ ННГУ им. Н.И. Лобачевского.
E-mail: *ElenkaLinnik@gmail.com*